Варіант 1.
Економетрична модель з двома змінними: побудова та аналіз.

Завдання 1.1. На основі даних по дев'яти металобазах побудувати економетричну модель, яка характеризує залежність між витратами обігу та вантажооборотом. Проаналізувати достовірність моделі та її параметрів. Зробити економічні висновки.

Таблиця 1.2

N п / п	Витрати обігу	Вантажо-оборот
1	2,7	15,6
2	3,0	15,3
3	2,8	14,9
4	2,9	15,1
5	2,6	16,1
6	2,5	16,7
7	2,8	15,4
8	2,6	17,1
9	2,5	16,8

Виконання.

Вихідні дані та елементарні перетворення цих даних для побудови моделі наведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

N п/п	X	Y	X^2	XY	$\hat{Y}$	$X-\overline{X}$	$Y-\overline{Y}$	$(X-\overline{X})^2$	$(X-\overline{X})$* $(Y-\overline{Y})$	$u=Y-\hat{Y}$	u^2	$(Y-\overline{Y})^2$
1	2,7	15,6	7,29	42,12	15,932	-0,011	-0,289	0,000	0,003	-0,332	0,110	0,083
2	3	15,3	9	45,9	14,764	0,289	-0,589	0,083	-0,170	0,536	0,287	0,347
3	2,8	14,9	7,84	41,72	15,543	0,089	-0,989	0,008	-0,088	-0,643	0,413	0,978
4	2,9	15,1	8,41	43,79	15,154	0,189	-0,789	0,036	-0,149	-0,054	0,003	0,622
5	2,6	16,1	6,76	41,86	16,321	-0,111	0,211	0,012	-0,023	-0,221	0,049	0,045
6	2,5	16,7	6,25	41,75	16,711	-0,211	0,811	0,045	-0,171	-0,011	0,000	0,658
7	2,8	15,4	7,84	43,12	15,543	0,089	-0,489	0,008	-0,043	-0,143	0,020	0,239
8	2,6	17,1	6,76	44,46	16,321	-0,111	1,211	0,012	-0,135	0,779	0,606	1,467
9	2,5	16,8	6,25	42	16,711	-0,211	0,911	0,045	-0,192	0,089	0,008	0,830

$\sum_{i=1}^{10}$	24,4	143	66,4	386,72				0,249	-0,969		1,497	5,269

1. Ідентифікуємо змінні:

Y — вантажооборот (залежна змінна);

X — витрати обігу (незалежна змінна).

2. Нехай специфікація моделі $Y = f(X, u)$ визначається лінійною функцією; вона має такий вигляд:

$$Y = a_0 + a_1 X + u,$$

де a_0, a_1 — параметри моделі;

u — стохастична складова, залишки.

3. Оцінимо параметри моделі $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X$ за методом 1МНК. Для цього запишемо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \sum\limits_i x_i \hat{a}_1 = \sum\limits_i y_i & (i = \overline{1,n}); \\ \sum\limits_i x_i \hat{a}_0 + \sum\limits_i x_i^2 \hat{a} = \sum\limits_i x_i y_i & (i = \overline{1,n}); \end{cases}$$

n = 9 — кількість спостережень.

Підставимо в цю систему величини n, $\sum\limits_i x_i$, $\sum\limits_i y_i$, $\sum\limits_i x_i^2$ $\sum\limits_i x_i y_i$, які розраховані на основі вихідних даних табл. 1.1; тоді система набуде такого вигляду:

$$\begin{cases} 9\hat{a}_0 + 24.4\hat{a}_1 = 143 \\ 24.4\hat{a}_0 + 66.4\hat{a}_1 = 386.72. \end{cases}$$

Розв’яжемо цю систему відносно невідомих параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$:

$$\begin{cases} \hat{a}_0 = (143 - 24.4\hat{a}_1)/9 = 15.889 - 2.711\hat{a}_1 \\ 24.4(15.889 - 2.711\hat{a}_1) + 66.4\hat{a}_1 = 386.72. \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{cases} \hat{a}_0 = 26.443 \\ \hat{a}_1 = -3.8929. \end{cases}$$

Таким чином, економетрична модель запишеться так:

$$\hat{Y} = 26.443 - 3.892X.$$

4. Знайшовши відхилення кожної змінної від своєї середньої арифметичної, розрахуємо параметри моделі альтернативним способом:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum\limits_i (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum\limits_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{-0.969}{0.249} = -3.892;$$

$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x} = 15.889 + 3.892 * 2.711 = 26.443.$$

5. Розрахуємо дисперсії залежної змінної та залишків:

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sum\limits_i (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{5.269}{8} = 0.659\ ;$$

$$\sigma_U^2 = \frac{\sum\limits_i u_i^2}{n-2} = \frac{1.497}{7} = 0{,}214\ .$$

6. Визначимо коефіцієнти детермінації та кореляції:

$$R^2 = \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_u^2}{\sigma_Y^2} = \frac{0.659 - 0{,}214}{0.659} \approx 0{,}675\ ;$$

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0{,}675} = 0{,}822\ .$$

Оскільки коефіцієнт детермінації R^2 = 0,675, це свідчить, що варіація вантажообороту на **675%** визначається варіацією витрат обігу. Коефіцієнт кореляції $R = 0{,}822$ характеризує тісний зв'язок між цими соціально-економічними показниками. Величини R^2 і R для парної економетричної моделі свідчать про її достовірність, якщо вони наближаються до одиниці.

7. Знайдемо матрицю помилок C (матрицю, обернену до матриці системи нормальних рівнянь):

$$\begin{pmatrix} 9 & 24.4 \\ 24.4 & 66.4 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 9 & 24.4 & 1 & 0 \\ 24.4 & 66.4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 29.643 & -10.893 \\ 0 & 1 & -10.893 & 4.018 \end{array}\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} 29.643 & -10.893 \\ -10.893 & 4.018 \end{pmatrix}$$ — матриця помилок.

8. Визначимо стандартні помилки оцінок параметрів моделі, враховуючи дисперсію залишків:

$$S_{\hat{a}_0} = \sqrt{\sigma_u^2 * c_{00}} = \sqrt{0,214*29.643} = \sqrt{6.344} = 2.518 \quad ;$$

$$S_{\hat{a}_1} = \sqrt{\sigma_u^2 * c_{11}} = \sqrt{0,214*4.018} = \sqrt{0,8599} = 0,928$$

Порівняємо стандартні помилки оцінок параметрів моделі з величиною цих оцінок. В результаті визначимо, що стандартна помилка оцінки параметра $\hat{a}_1$ становить **23,8%** абсолютного значення цієї оцінки (**3,8929**), що свідчить про незміщеність даної оцінки параметра моделі. Стандартна помилка оцінки параметра $\hat{a}_0$ становить **9,52%** абсолютного значення цієї оцінки (**26,443**), а це означає, що обидва параметри можуть мати зміщення, яке зумовлюється невеликою сукупністю спостережень (**n = 9**).

9. <u>Висновки</u>. Економетрична модель $\hat{Y} = 26.443 - 3.8929X$ кількісно описує зв’язок вантажообороту та витрат обігу.

Параметр $\hat{a}_1 = -3.8929$ характеризує граничну величину вантажоброту, коли витрати обігу збільшуються на одиницю, тобто при збільшенні витрат обігу на одиницю вантажооборот зменшується на **3,8929** одиниці $\left(\hat{a}_1 = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_1} \right)$.

Визначимо коефіцієнт еластичності вантажообороту залежно від витрат обігу:

$$E_{Y/X} = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_1} : \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = -3.8929 : \frac{15.889}{2.711} = -22.816 \, .$$

На основі коефіцієнта еластичності можна стверджувати, що при збільшенні витрат обігу на один процент вантажооборот зменшується на **22,816%.**

Загальна економетрична модель: побудова й аналіз.

Побудувати економетричну модель, що характеризує залежність між витратами обігу, обсягом вантажообороту та фондомісткістю бази. Визначити стандартні помилки параметрів. Дати змістовне тлумачення взаємозв'язку.

Таблиця 2.3

N п/п	Витрати	Вантажо-оборот	Фондо-місткість
1	2,72	15,6	106,3
2	3,04	13,5	128,5
3	2,84	15,3	118,0
4	2,89	14,9	121,2
5	2,58	15,1	120,0
6	2,64	16,1	118,4
7	2,52	16,7	108,4
8	2,75	15,4	110,0
9	2,63	17,1	105,9

Рішення:

1. Ідентифікуємо змінні моделі:

Y — вантажооборот (залежна змінна);

X_1 — витрати обігу (незалежна змінна);

X_2 — фондомісткість (незалежна змінна);

u — залишки (стохастична складова).

Загальний вигляд моделі:

$$Y = f(X_1, X_2, u) \; .$$

2. Специфікуємо модель, тобто в даному випадку визначимо її аналітичну форму:

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + u;$$

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_1 + \hat{a}_2 X_2.$$

3. Оцінимо параметри моделі на основі методу 1МНК, попередньо висунувши гіпотезу, що всі чотири передумови для його застосування дотримані.

Оператор оцінювання на основі 1МНК:

$$\hat{A} = (X' X)^{-1} X' Y.$$

У даному операторі матриця X характеризує всі незалежні змінні моделі. Оскільки економетрична модель має вільний член $\hat{a}_0$, для якого всі $x_i = 1$, то матрицю X треба доповнити першим стовпцем, в якому всі шістнадцять членів є одиницями. X' — матриця, транспонована до матриці X, а вектор Y — вектор залежної змінної.

X=

1	2,72	106,3
1	3,04	128,5
1	2,84	118
1	2,89	121,2
1	2,58	120
1	2,64	118,4
1	2,52	108,4
1	2,75	110
1	2,63	105,9

X'*X=

9	24,61	1036,7
24,61	67,5135	2841,525
1036,7	2841,525	119909,3

X'*Y=

139,7
380,854
16037,72

$(X'*X)^{-1}$ =

37,66786	-9,15251	-0,10878
-9,15251	7,871215	-0,1074
-0,10878	-0,1074	0,003494

Підставимо отримані значення оберненої матриці $(X'X)^{-1}$ і добуток матриць $X'Y$ в оператор оцінювання і визначимо оцінки параметрів моделі:

A=

31,920
-3,218
-0,066

Таким чином, $\hat{a}_0 = 31.920; \hat{a}_1 = -3.218; \hat{a}_2 = -0.066$. Звідси економетрична модель має вигляд:

$$\hat{Y} = 31.920 - 3.218X_1 - 0.066X_2.$$

4. Визначимо розрахункові значення залежної змінної $\hat{Y}$ на основі моделі, підставивши в неї значення незалежних змінних X_1 та X_2 . Потім віднімемо розрахункові значення $\hat{Y}$ від фактичних Y, в результаті отримаємо залишки: $u = Y - \hat{Y}$. Всі ці розрахунки наведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

№ п / п	$\hat{Y}$	u	u^2	$Y - \overline{Y}$	$\left(Y - \overline{Y}\right)^2$
1	16,1551	-0,5551	0,3082	0,0778	0,0060
2	13,6608	-0,1608	0,0259	-2,0222	4,0894
3	14,9971	0,3029	0,0917	-0,2222	0,0494
4	14,6251	0,2749	0,0756	-0,6222	0,3872
5	15,7018	-0,6018	0,3622	-0,4222	0,1783
6	15,6143	0,4857	0,2359	0,5778	0,3338
7	16,6601	0,0399	0,0016	1,1778	1,3872
8	15,8145	-0,4145	0,1718	-0,1222	0,0149
9	16,4711	0,6289	0,3955	1,5778	2,4894
Всього		0,0000	1,6683		8,9356

5. Розрахуємо дисперсії залишків та залежної змінної Y:

$$\sigma_U^2 = \frac{1}{n-m} u' * u = \frac{1.6683}{6} = 0.2781;$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n-1} Y' * Y = \frac{8.9356}{8} = 1.1170.$$

6. Визначимо матрицю коваріацій оцінок параметрів моделі:

$$\mathrm{var}(\hat{A}) = \sigma_U^2 (X'X)^{-1};$$

var(A)=

10,4736	-2,5449	-0,0302
-2,5449	2,1886	-0,0299
-0,0302	-0,0299	0,0010

Діагональні елементи цієї матриці характеризують дисперсії оцінок параметрів моделі:

$$\sigma_{\hat{a}_0}^2 = 10.4736;$$
$$\sigma_{\hat{a}_1}^2 = 2.1886;$$
$$\sigma_{\hat{a}_2}^2 = 0.0010.$$

Інші елементи даної матриці визначають рівень коваріації між оцінками параметрів моделі.

7. Знайдемо стандартні помилки оцінок параметрів:

$$S_{\hat{a}_0} = \sqrt{\sigma_{\hat{a}_0}^2} = \sqrt{10.4736} = 3.236;$$
$$S_{\hat{a}_1} = \sqrt{\sigma_{\hat{a}_1}^2} = \sqrt{2.1886} = 1.479;$$
$$S_{\hat{a}_2} = \sqrt{\sigma_{\hat{a}_2}^2} = \sqrt{0.001} = 0.0316.$$

Порівняємо стандартні помилки оцінок параметрів моделі з величиною оцінки. Так, співвідношення стандартної помилки й абсолютного значення параметра $\hat{a}_0$ становить **10,13%**, параметра $\hat{a}_1$ — **45,96%**, параметра $\hat{a}_2$ — **47,88%**. Друге й третє співвідношення свідчать про те, що оцінки параметрів моделі $\hat{a}_1$ і $\hat{a}_2$ можуть мати зміщення, а перше співвідношення підтверджує незміщеність оцінки параметра $\hat{a}_0$.

8. Дамо змістовне тлумачення параметрів моделі.

Оцінка параметра $\hat{a}_1$ характеризує граничну зміну величини вантажообігу залежно від зміни витрат обігу на одиницю. Тобто, якщо витрати обігу зростуть на одиницю, то вантажообіг зменшиться на **3,218** одиниці при незмінній фондомісткості.

Оцінка параметра $\hat{a}_2$ характеризує граничну зміну вантажообороту при збільшенні фондомісткості. Так, якщо фондомісткість збільшиться на 1, то вантажообіг зменшиться на **0,066** одиниці при незмінній величині витрат обігу.

ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ

Завдання 3.1. Для моделі, яка побудована для даних, наведених у табл. **2.3**, виконати дисперсійний аналіз, зробити висновки відносно достовірності моделі та її параметрів.

Рішення.

Економетрична модель має вигляд:

$$\hat{Y} = 31.920 - 3.218X_1 - 0.066X_2 .$$

1. Визначимо коефіцієнт детермінації на основі співвідношення:

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_U^2}{\sigma_Y^2},$$

де σ_U^2, σ_Y^2 — відповідно залишкова й загальна дисперсії.

$$R^2 = 1 - \frac{0.2781}{1.1170} = 0,7510 \cdot$$

Це значення коефіцієнта детермінації свідчить про те, що варіація вантажообороту на 75,1% визначається варіацією витрат обігу і фондомісткості.

2. Коефіцієнт кореляції $R_2 = \sqrt{R^2} \approx 0.8666$. Оскільки коефіцієнт кореляції наближається до 0,9, то це свідчить, що зв'язок між витратами на харчування, загальними затратами і складом сім'ї є сильним.

3. Визначимо F- критерій (критерій Фішера):

$$F = \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_U^2}{\sigma_U^2} = \frac{1.1170 - 0.2781}{0.2781} = 3.017\ .$$

Порівняємо розраховане значення критерію Фішера з табличним. При ступенях свободи $m-1=2$; $n-m=6$ і рівні довіри $\alpha = 0{,}05$, $F_{\text{табл}} = 5.14$.

Оскільки $F_{\text{факт}}$ < $F_{\text{табл}}$, то гіпотеза про значущість зв'язку, який описується економетричною моделлю, не підтверджується.

4. Розрахуємо t- критерії:

$$t_{\hat{a}_0} = \frac{|\hat{a}_0|}{S_{\hat{a}_0}} = 9.864;$$

$$t_{\hat{a}_1} = \frac{|\hat{a}_1|}{S_{\hat{a}_1}} = 2.176;$$

$$t_{\hat{a}_2} = \frac{|\hat{a}_2|}{S_{\hat{a}_2}} = 2.025.$$

Табличне значення t- критерію при ступені свободи $n-m=6$ і рівні довіри $\alpha = 0{,}05$ дорівнює 2,45. Враховуючи, що

$$t_{\hat{a}_0} > t_{(0{,}05)}$$

оцінки параметра моделі $\hat{a}_0$ є достовірною. Всі інші оцінки – недостовірні,бо фактичне значення критерію, менше ніж його критичне значення.

Завдання 3.2. За даними, які наведені в табл. **2.3**, побудувати економетричну модель за методом 1МНК на основі покрокової регресії. Порівняти оцінки параметрів даної економетричної моделі з оцінками параметрів моделі для відповідних даних завдання 2.3. Дати змістовне тлумачення оцінок параметрів, зробити висновки.

Рішення.

1. Ідентифікуємо змінні моделі:

Y — вантажооборот (залежна змінна);

X_1 — витрати обігу (незалежна змінна);

X_2 — фондомісткість (незалежна змінна);

u — залишки (стохастична складова).

У загальному вигляді економетрична модель:

$$Y = f(X_1, X_2, u) .$$

2. Специфікуємо модель в лінійній формі:

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + u ;$$
$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_1 + \hat{a}_2 X_2 .$$

Оскільки оцінка параметрів моделі за методом 1МНК виконуватиметься на основі покрокової регресії, то спочатку буде побудована економетрична модель виду:

$$Y^* = \hat{\beta}_1 X_1^* + \hat{\beta}_2 X_2^* ,$$

де

$$Y^* = \frac{Y_i - \overline{Y}}{\sigma_Y} ; \quad X_1^* = \frac{X_{1i} - \overline{X}_1}{\sigma_{X1}} ; \quad X_2^* = \frac{X_{2i} - \overline{X}_2}{\sigma_{X2}} .$$

3. Нормалізуємо змінні моделі. Розрахунки представимо в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

№ п / п	Y	X_1	X_2	$Y-\overline{Y}$	$X_1-\overline{X}_1$	$X_2-\overline{X}_2$	$(Y-\overline{Y})^2$	$(X_1-\overline{X}_1)^2$	$(X_2-\overline{X}_2)^2$
1	15,6	2,72	106,3	0,0778	-0,0144	-8,8889	0,0060	0,0002	79,0123
2	13,5	3,04	128,5	-2,0222	0,3056	13,3111	4,0894	0,0934	177,1857
3	15,3	2,84	118	-0,2222	0,1056	2,8111	0,0494	0,0111	7,9023
4	14,9	2,89	121,2	-0,6222	0,1556	6,0111	0,3872	0,0242	36,1335
5	15,1	2,58	120	-0,4222	-0,1544	4,8111	0,1783	0,0239	23,1468
6	16,1	2,64	118,4	0,5778	-0,0944	3,2111	0,3338	0,0089	10,3112
7	16,7	2,52	108,4	1,1778	-0,2144	-6,7889	1,3872	0,0460	46,0890
8	15,4	2,75	110	-0,1222	0,0156	-5,1889	0,0149	0,0002	26,9246

9	17,1	2,63	105,9	1,5778	-0,1044	-9,2889	2,4894	0,0109	86,2835
$\sum$	139,7	24,61	1036,7				8,9356	0,2188	492,9889

Продовження табл. 3.2

№ п / п	Y^*	X_1^*	X_2^*
1	0,0781	-0,0926	-1,2010
2	-2,0295	1,9596	1,7985
3	-0,2230	0,6770	0,3798
4	-0,6245	0,9976	0,8122
5	-0,4237	-0,9905	0,6501
6	0,5799	-0,6057	0,4339
7	1,1820	-1,3753	-0,9173
8	-0,1227	0,0998	-0,7011
9	1,5835	-0,6698	-1,2551
10	0,0781	-0,0926	-1,2010

Середні значення:

Ysr= 15,5222; X1sr= 2,7344; x2sr= 115,1889.

Дисперсія:

$$\sigma_Y^2 = 0.9928; \quad \sigma_{X1}^2 = 0{,}1559; \quad \sigma_{X2}^2 = 54{,}7765.$$

Середньоквадратичні відхилення:

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{0.9928} = 0.9964;$$

$$\sigma_{X1} = \sqrt{\sigma_{X_1}^2} = \sqrt{0{,}1559} = 0{,}3948;$$

$$\sigma_{X2} = \sqrt{\sigma_{X_2}^2} = \sqrt{54.7765} = 7.4011.$$

4. Побудуємо кореляційну матрицю (матрицю парних коефіцієнтів кореляції):

$$r = \begin{pmatrix} r_{YY} & r_{YX_1} & r_{YX_2} \\ r_{YX_1} & r_{X_1X_1} & r_{X_1X_2} \\ r_{YX_2} & r_{X_2X_1} & r_{X_2X_2} \end{pmatrix}.$$

Розрахунок елементів кореляційної матриці наведено в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Y^{*2}	X_1^{*2}	X_2^{*2}	$Y^* X_1^*$	$Y^* X_2^*$	$X_1^* X_2^*$
0,0061	0,0086	1,4424	-0,0072	-0,0937	0,1113

4,1189	3,8400	3,2347	-3,9770	-3,6501	3,5244
0,0497	0,4583	0,1443	-0,1510	-0,0847	0,2571
0,3900	0,9952	0,6597	-0,6230	-0,5072	0,8102
0,1796	0,9811	0,4226	0,4197	-0,2755	-0,6439
0,3362	0,3669	0,1882	-0,3512	0,2516	-0,2628
1,3972	1,8914	0,8414	-1,6256	-1,0842	1,2615
0,0150	0,0100	0,4915	-0,0122	0,0860	-0,0699
2,5073	0,4487	1,5752	-1,0606	-1,9873	0,8407
0,0061	0,0086	1,4424	-0,0072	-0,0937	0,1113
Всього					
9,0000	9,0000	9,0000	-7,3882	-7,3452	5,8286

Звідси кореляційна матриця:

	1,0000	-0,8209	-0,8161
r=	-0,8209	1,0000	0,6476
	-0,8161	0,6476	1,0000

5. Враховуючи, що

$$\max\{r_{YX_1}, r_{YX_2}\} = r_{YX_1} = -0{,}8209,$$

то на першому етапі треба побудувати економетричну модель виду:

$$Y^* = \hat{\beta}_1 X_1^* .$$

Рівняння для визначення параметру $\hat{\beta}_1$ має вигляд:

$$r_{YX_1} = \hat{\beta}_1 r_{X_1X_1};$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{r_{YX_1}}{r_{X_1X_1}} = \frac{-0.8209}{1};$$

$$\hat{\beta}_1 = -0.8209 .$$

Запишемо модель:

$$Y^* = -0.8209 X_1^*,$$

6. На другому етапі включимо в економетричну модель X_2^*, в результаті модель набуде такого вигляду:

$$Y^* = \hat{\beta}_1 X_1^* + \hat{\beta}_2 X_2^* .$$

Система рівнянь для визначення параметрів цієї моделі:

$$\begin{cases} r_{YX_1} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 r_{X_1X_2} \\ r_{YX_2} = \hat{\beta}_1 r_{X_1X_2} + \hat{\beta}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0.8209 = \hat{\beta}_1 + 0,6476\hat{\beta}_2 \\ -0,8161 = 0,6476\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо:

$$\hat{\beta}_1 = -0,5684;$$
$$\hat{\beta}_2 = -0,4900.$$

Економетрична модель має вигляд:

$$Y^* = -0,5684 X_1^* - 0,4900 X_2^* .$$

7. Розрахуємо коефіцієнти детермінації та кореляції:

$$R^2 = \hat{\beta}_1 r_{YX_1} + \hat{\beta}_2 r_{YX_2} = -0,5684 \cdot (-0,8209) + (-0,49) \cdot (-0,8161) = 0,751 .$$

Це значення коефіцієнта детермінації свідчить про те, що варіація вантажообороту лише на 75,1% визначається варіацією витрат обігу та фондомісткістю.

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,751} = 0,8667.$$

Коефіцієнт кореляції характеризує сильний зв'язок факторів із вантажооборотом.

8. Оцінимо достовірність моделі та її параметрів на основі критеріїв Фішера та Стьюдента.

$$F = \frac{R^2/(m-1)}{(1-R^2)/(n-m)} = \frac{0,751/(3-1)}{0,249/(9-3)} = 9.048$$

При ступенях свободи $m-1=2$ і $n-m=6$; рівні довіри $\alpha = 0,05$ $F_{табл}$ = 5,14. Оскільки $F_{факт}$ > $F_{табл}$, то нульова гіпотеза відносно суттєвості зв'язку, який вимірюється на основі економетричної моделі, приймається. Це означає, що економетрична модель є достовірною.

9. Виконаємо перехід до економетричної моделі, в якій змінні виражені в абсолютних значеннях (вони наведені в табл. 3.1)

$$\hat{a}_1 = \hat{\beta}_1 \frac{\sigma_Y}{\sigma_{X1}} = -0.5684 \cdot \frac{0.9964}{0,176} = -3.218\ ;$$

$$\hat{a}_2 = \hat{\beta}_2 \frac{\sigma_Y}{\sigma_{X2}} = -0,4900 \cdot \frac{0.9964}{7.4011} = -0,066\ ;$$

$$\hat{a}_0 = \overline{Y} - \hat{a}_1 \overline{X}_1 - \hat{a}_2 \overline{X}_2 = 15.5222 + 3.218 \cdot 2.7344 + 0,066 \cdot 115,1889 = 31.920\ ;$$

$$\hat{Y} = 31.920 - 3.218 X_1 - 0,066 X_2 .$$

10. Наведемо розраховані економетричні моделі в даному прикладі і дамо змістовне тлумачення параметрів цих моделей.

1) $Y^* = -0,5036 X_1^* - 0,4900 X_2^* .$

2) $\hat{Y} = 31.920 - 3.218 X_1 - 0,066 X_2 .$

Перш за все звернімо увагу на відсутність вільного члена в першій економетричній моделі. Це пов'язано з тим, що всі змінні нормалізовані і мають одну й ту саму одиницю виміру. Параметри першого рівняння характеризують граничну зміну залежної змінної, якщо незалежна збільшиться на величину свого середньоквадратичного відхилення σ_{X_j}. Так, якщо X_1^* збільшиться на σ_{X_1}, то Y^* — зменшиться на $0,5036\sigma_Y$ при незмінній величині X_2^*; якщо X_2^* збільшиться на σ_{X_2}, то Y^* — зменшиться на 0,49 σ_Y при незмінній величині фактора X_1^*. Враховуючи, що всі змінні мають одну й ту саму величину виміру, параметри першої економетричної моделі характеризують порівняльну силу впливу незалежних змінних на залежну. При параметрі $\hat{\beta}_1 = |0,5036| > \hat{\beta}_2 = |0,49|$ це свідчить, що витрати обігу сильніше впливає на вантажооборот, ніж фондомісткість сили.

В другій економетричній моделі, яка характеризує зв'язок вантажообороту з витратами обігу та фондомісткістю сили, коли кожний економічний показник має свою початкову одиницю виміру, є вільний член.

Його рівень залежить від початку відрахунку змінних, а також від одиниць виміру кожної змінної моделі.

Параметр $\hat{a}_1 = -3.218$ показує, що при зміні витрат обігу на 1 тис.грн. вантажооборот зменшиться на 3,218 тис.грн., якщо фондомісткість не зміниться. Параметр $\hat{a}_2 = -0{,}066$ показує, що при збільшенні фондомісткості на 1 вантожооборот зменшиться на 0,066 тис.грн. У загальному кожний із цих параметрів характеризує граничну зміну вантажообороту, якщо відповідний фактор зміниться на одиницю за умови, що інший є константою. Маючи оцінку параметрів лінійної моделі $\hat{a}_1$ і $\hat{a}_2$ та співвідношення середніх значень продуктивності праці і кожного із факторів зокрема, знайдемо коефіцієнти еластичності:

$$E_{Y/X_1} = \hat{a}_1 : \frac{\overline{Y}}{\overline{X}_1} = -3.218 : \frac{15.522}{2.7344} = -18.267;$$

$$E_{Y/X_2} = \hat{a}_2 : \frac{\overline{Y}}{\overline{X}_2} = -0.066 : \frac{15.522}{115.1889} = -0.0089.$$

Коефіцієнти еластичності характеризують, на скільки процентів зміниться вантажооборот, якщо кожний із факторів, зокрема, зміниться на 1%. Так, $E_{Y/X}$ = -18,267, тобто якщо витрати обігу збільшиться на 1% , фондомісткість – на 1%. E_{Y/X_2} = – 0,0089, а це означає, що граничне збільшення вантажообороту при зниженні фондомісткості на 1% складатиме 0,0089%.

4.2. Дослідження наявності мультиколінеарності на основі алгоритму Феррара—Глобера

Завдання 4.1. Нехай на витрати обігу впливають: обсяг вантажообороту, запаси по вантажообороту та трудомісткість його одиниці. Щоб побудувати економетричну модель цієї залежності на основі методу 1МНК, необхідно бути впевненим, що між факторами вантажообороту, запасів та трудомісткості не існує мультиколінеарності. Треба дослідити наявність мультиколінеарності між цими факторами на основі даних, що наведені в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

№ п / п	Вантажо-оборот	Запаси	Трудоміст-кість
1	15,6	40,4	2,11
2	13,5	38,9	2,78
3	15,3	36,6	2,17
4	14,9	41,4	2,15
5	15,1	32,2	2,11
6	16,1	31,4	1,97
7	16,7	32,6	1,96
8	15,4	38,7	2,12
9	17,1	44,3	2,02
10	16,8	39,3	2,13

Рішення.

Крок 1. Нормалізація змінних.

Позначимо вектори незалежних змінних — продуктивності праці, фондомісткості, коефіцієнтів плинності робочої сили — через відповідно X_1, X_2, X_3. Елементи стандартизованих векторів розрахуємо за формулою:

$$X_{ik}^{*} = \frac{X_{ik} - \overline{X}_k}{\sqrt{n\sigma_{X_k}^2}},$$

де n — кількість спостережень, $n = 10$;

m — число незалежних змінних, $m = 3$;

$\overline{X_k}$ — середня арифметична вектора X_k ;

$\sigma^2_{X_k}$ — дисперсія змінної X_k.

$$\overline{X_1} = \frac{\sum_{t=1}^{10} X_{i1}}{n} = \frac{156.5}{10} = 15.65;$$

$$\overline{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_{i2}}{n} = \frac{375.8}{10} = 37.58;$$

$$\overline{X}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_{i3}}{n} = \frac{215.2}{10} = 21.52$$

В табл. 4.2 наведені всі розрахунки по стандартизації незалежних змінних X_1, X_2, X_3 згідно з наведеним співвідношенням.

Таблиця 4.2

$X_{i1}-\overline{X_1}$	$X_{i2}-\overline{X_2}$	$X_{i3}-\overline{X_3}$	$\left(X_{i2}-\overline{X}_2\right)^2$	$\left(X_{i2}-\overline{X}_2\right)^2$	$\left(X_{i3}-\overline{X}_3\right)^2$	X^*_{i1}	X^*_{i2}	X^*_{i3}
-0,05	2,82	-0,042	0,0025	7,9524	0,0018	-0,0490	0,6910	-0,1903
-2,15	1,32	0,628	4,6225	1,7424	0,3944	-2,1077	0,3234	2,8453
-0,35	-0,98	0,018	0,1225	0,9604	0,0003	-0,3431	-0,2401	0,0816
-0,75	3,82	-0,002	0,5625	14,5924	0,0000	-0,7353	0,9360	-0,0091
-0,55	-5,38	-0,042	0,3025	28,9444	0,0018	-0,5392	-1,3183	-0,1903
0,45	-6,18	-0,182	0,2025	38,1924	0,0331	0,4412	-1,5143	-0,8246
1,05	-4,98	-0,192	1,1025	24,8004	0,0369	1,0294	-1,2203	-0,8699
-0,25	1,12	-0,032	0,0625	1,2544	0,0010	-0,2451	0,2744	-0,1450
1,45	6,72	-0,132	2,1025	45,1584	0,0174	1,4215	1,6466	-0,5981
1,15	1,72	-0,022	1,3225	2,9584	0,0005	1,1274	0,4215	-0,0997
Σ			10,405	166,556	0,4872			

Дисперсії кожної незалежної змінної мають такі значення:

$$\sigma^2_{X_1} = \frac{\sum_{i=1}^{10}(X_{i1}-\overline{X_1})^2}{n} = \frac{10.405}{10} = 1.0405;$$

$$\sigma^2_{X_2} = \frac{\sum_{i=1}^{10}(X_{i2}-\overline{X_2})^2}{n} = \frac{166.556}{10} = 16.6556;$$

$$\sigma^2_{X_3} = \frac{\sum_{i=1}^{10}(X_{i3}-\overline{X_3})^2}{n} = \frac{0.4872}{10} = 0.04872.$$

Тоді знаменник для стандартизації кожної незалежної змінної буде дорівнювати:

для X_1: $\sqrt{n\sigma_{X_1}^2} = \sqrt{10 \cdot 1.0405} = 3.2257$;

для X_2: $\sqrt{n\sigma_{X_2}^2} = \sqrt{10 \cdot 16.6556} = 12.9057$;

для X_3: $\sqrt{n\sigma_{X_3}^2} = \sqrt{10 \cdot 0.04872} = 0.6980$.

Матриця стандартизованих змінних матиме вигляд:

X=

-0,0155	0,2185	-0,0602
-0,6665	0,1023	0,8998
-0,1085	-0,0759	0,0258
-0,2325	0,2960	-0,0029
-0,1705	-0,4169	-0,0602
0,1395	-0,4789	-0,2608
0,3255	-0,3859	-0,2751
-0,0775	0,0868	-0,0458
0,4495	0,5207	-0,1891
0,3565	0,1333	-0,0315

Крок 2. Знаходження кореляційної матриці R:

$$R = X^{*'} X^{*},$$

де $X^{*'}$ — матриця транспонована до матриці X^*.

Ця матриця симетрична і має розмір 3 х 3. Для даної задачі:

R=

1,0000	0,0214	-0,8093
0,0214	1,0000	0,2255
-0,8093	0,2255	1,0000

Кожен елемент цієї матриці характеризує тісноту зв’язку однієї незалежної змінної з іншою. Оскільки діагональні елементи характеризують тісноту зв’язку кожної незалежної змінної з цією самою змінною, то вони дорівнюють одиниці.

Інші елементи матриці R трактуються так:

$$r_{X_1X_2} = 0{,}0214;$$

$$r_{X_1X_3} = -0{,}8093 \ ;$$

$$r_{X_2X_3} = 0{,}2255 \ ,$$

тобто вони є парними коефіцієнтами кореляції незалежних змінних. На основі цих коефіцієнтів можна зробити висновок, що між змінними X_1, X_2, X_3 існує зв’язок. Але чи можна стверджувати, що цей зв’язок є явищем мультиколінеарності і він негативно впливатиме на оцінку економетричної моделі?

Щоб відповісти на це запитання, треба продовжити розв'язання на основі алгоритму Феррара—Глобера і в результаті знайти статистичні критерії оцінки мультиколінеарності.

Крок 3. Знайдемо детермінант кореляційної матриці R і критерій X^2:

3а) $D = |R| = 0{,}2859$ **;**

3б) $\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m+5)\right]\ln D = -\left[9 - \frac{1}{6}(6+5)\right]\ln 0{,}2859 = 8.9717$.

При ступені свободи $\frac{1}{2}m(m-1) = 3$ і рівні значущості α = 0,01 $X^2_{\text{табл}}$ = 11,34. Приймаючи $\chi^2_{\text{факт}} < \chi^2_{\text{табл}}$, можна зробити висновок, що в масиві змінних не існує мультиколінеарність.

Крок 4. Знайдемо матрицю, обернену до матриці R:

$$C = R^{-1} = (X^{*\prime}\, X^{*})^{-1};$$

C=

3,3190	-0,7130	2,8468
-0,7130	1,2067	-0,8491
2,8468	-0,8491	3,4953

Крок 5. Використовуючи діагональні елементи матриці C, розрахуємо F-критерії:

$$F_1 = (c_{11} - 1)\,\frac{n-m}{m-1} = (3.3190 - 1)\frac{7}{2} = 8.1165\ ;$$

$$F_2 = (c_{22} - 1)\,\frac{n-m}{m-1} = (1{,}2067 - 1)\frac{7}{2} = 0.7234\ ;$$

$$F_3 = (c_{33} - 1)\,\frac{n-m}{m-1} = (3.4953 - 1)\frac{7}{2} = 8.7335\ .$$

При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ і ступенях свободи $\gamma_1 = 7$ і $\gamma_2 = 2$ критичне (табличне) значення критерію $F = 4{,}74$.

Через те, що $F_{1\,\text{факт}} > F_{\text{табл}}$,

$F_{2\,\text{факт}} < F_{\text{табл}}$,

$F_{3\,\text{факт}} > F_{\text{табл}}$,

Змінна X3 можливо мультиколінеарна з двома іншими.

Щоб визначити наявність попарної мультиколінеарності, продовжимо розрахунок і перейдемо до кроку 6.

Крок 6. Розрахуємо часткові коефіцієнти кореляції, використавши елементи матриці C:

$$r_{12\cdot 3} = \frac{-c_{12}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}} = \frac{0{,}713}{\sqrt{3.3190\cdot 1{,}2067}} = 0{,}3562\ ;$$

$$r_{13\cdot 2} = \frac{-c_{13}}{\sqrt{c_{11}c_{33}}} = \frac{-2.8468}{\sqrt{3.3190\cdot 3.4953}} = -0{,}8358\ ;$$

$$r_{23\cdot 1} = \frac{-c_{23}}{\sqrt{c_{22}c_{33}}} = \frac{0{,}8491}{\sqrt{1{,}2067\cdot 3.4953}} = 0{,}4134\ .$$

Часткові коефіцієнти кореляції характеризують тісноту зв'язку між двома змінними за умови, що третя не впливає на цей зв'язок.

Порівнявши часткові коефіцієнти кореляції з парними, які наведені вище, можна помітити, що часткові коефіцієнти значно менше парних. Це ще раз підтверджує, що на основі парних коефіцієнтів кореляції не можна зробити висновки про наявність чи відсутність мультиколінеарності.

Крок 7. Визначимо t- критерії на основі часткових коефіцієнтів кореляції:

$$t_{12} = \frac{r_{12\cdot 3}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{12\cdot 3}^2}} = \frac{0{,}3562\sqrt{7}}{\sqrt{1-0{,}1268}} = 1.008\ ;$$

$$t_{13} = \frac{r_{133}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{133}^2}} = \frac{0{,}8358\sqrt{7}}{\sqrt{1-0{,}6985}} = 4.027\ ;$$

$$t_{23} = \frac{r_{233}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{233}^2}} = \frac{0{,}4134\sqrt{7}}{\sqrt{1-0{,}1708}} = 1.201\ .$$

Табличне значення t- критерію при $n - m$ = 7 ступенях свободи і рівні значущості α = 0,05 дорівнює 1,89. Друге числове значення t- критеріїв, знайдених для кожної пари змінних, більше за їх табличне значення. Звідси робимо висновок, що змінні X1 та X3 є мультиколінеарними і одну із них можна виключити із розгляду.

5.2. Застосування параметричного тесту Гольдфельда—Квандта для визначення гетероскедастичності

Завдання 5.1. Для побудови економетричної моделі, що характеризує залежність між затратами на реалізацію продукції, обсягом товарообігу та середнім рівнем товарних запасів необхідно перевірити гіпотезу про наявність гетероскедастичності для вихідних даних, які наведені в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

№ складу	Затрати на реалізацію продукції, млн. грн.	Обсяг товарообігу, млн.т.	Середній рівень товарних запасів, млн. т
1	300	25	5
2	280	20	4
3	350	30	6
4	340	30	7
5	330	28	7
6	320	28	5
7	310	25	6
8	300	24	4
9	320	27	5
10	280	22	4
11	340	35	6
12	360	30	7
13	320	29	7
14	300	28	5
15	310	25	6
16	350	26	4

Рішення.

1. Ідентифікація змінних:

Y — обяг товарообігу (залежна змінна);

X_1 — затрати на реалізацію продукції (незалежна змінна);

X_2 — середній рівень товарних запасів (незалежна змінна);

u — залишки (стохастична складова).

Загальний вигляд моделі:

$$Y=f\,(X_1,X_2,u)\ .$$

2. Специфікація моделі:

$$Y=a_0+a_1X_1+a_2X_2+u\ ,$$

$$\hat{Y}=\hat{a}_0+\hat{a}_1X_1+\hat{a}_2X_2,$$

$$u=Y-\hat{Y}\,.$$

3. Визначимо наявність гетероскедастичності. Для цього застосуємо алгоритм Гольдфельда—Квандта. Дану сукупність спостережень впорядкуємо по X від меншого до більшого значення. Відшукуємо C спостережень, які знаходяться в середині сукупності:

$$\frac{C}{n}=\frac{4}{15}\ ,\quad n=16\ ,\quad \frac{C}{16}=\frac{4}{15}\ ,\quad C=\frac{4\cdot 16}{15}\approx 4\ .$$

Тоді $n_1=n_2=6$.

Запишемо вихідні дані:

№	X1	X2	Y
1	300	5	25
2	280	4	20
3	350	6	30
4	340	7	30
5	330	7	28
6	320	5	28
7	310	6	25
8	300	4	24
9	320	5	27
10	280	4	22
11	340	6	35
12	360	7	30
13	320	7	29
14	300	5	28
15	310	6	25
16	350	4	26

3.1. Розрахуємо економетричну модель для сукупності $n_1=6$.

Оцінимо кількісно параметри моделі на основі 1МНК. Допоміжні матриці:

X=

1	300	5
1	280	4
1	350	6
1	340	7
1	330	7
1	320	5

Y=

25
20
30
30
28
28

X'=

1	1	1	1	1	1
300	280	350	340	330	320
5	4	6	7	7	5

X'*X=

6	1920	34
1920	617800	11010
34	11010	200

(X'*X)-1=

48,5456	-0,2004	2,7801
-0,2004	0,0009	-0,0162
2,7801	-0,0162	0,4232

X'*Y=

161
52000
931

A=

-17,471
0,136
0,133

Модель:

$$\hat{Y} = -17.471 + 0.136 X_1 + 0.133 X_2 .$$

На основі моделі можна зробити висновок: якщо затрати на реалізацію продукції виростуть на **1**, то обсяг товарообігу виросте на 0,136, якщо середній рівень товарних запасів зросте на 1, то обсяг товарообігу збільшиться на 0,133.

3.2 Аналогічно розрахуємо економетричну модель для сукупності $n_2 = 6$.

X=

1	340	6
1	360	7
1	320	7
1	300	5
1	310	6
1	350	4

Y=

35
30
29
28
25
26

X'=

1	1	1	1	1	1
340	360	320	300	310	350
6	7	7	5	6	4

X'*X=

6	1980	35
1980	656200	11560
35	11560	211

(X'*X)-1=

42,2469	-0,1154	-0,6848
-0,1154	0,0004	-0,0005
-0,6848	-0,0005	0,1471

X'*Y=

173
57230
1017

A=

7,312
0,046
1,079

Модель:

$$\hat{Y} = 7.312 + 0.046 X_1 + 1.079 X_2 .$$

На основі моделі можна зробити висновок: якщо затрати на реалізацію продукції виростуть на **1**, то обсяг товарообігу виросте на 0,046, якщо середній рівень товарних запасів зросте на 1, то обсяг товарообігу збільшиться на 1,079.

Як бачимо, моделі суттєво відрізняються одна від одної.

3.3. Для кожної моделі знайдемо суму квадратів залишків:

$$S_1 = u_1' u_1 = \sum (Y_1 - \hat{Y}_1)^2 ;$$

$$S_2 = u_2'u_2 = \sum (Y_2 - \hat{Y}_2)^2 \ .$$

Допоміжні дані:

Модель 1				Модель 2			
Y	Yteor	u	u^2	Y	Yteor	u	u^2
25	24,0228	0,9772	0,9549	35	29,4746	5,5254	30,5300
20	21,1680	-1,1680	1,3643	30	31,4764	-1,4764	2,1796
30	30,9606	-0,9606	0,9227	29	29,6305	-0,6305	0,3975
30	29,7324	0,2676	0,0716	28	26,5499	1,4501	2,1028
28	28,3714	-0,3714	0,1379	25	28,0902	-3,0902	9,5493
28	26,7448	1,2552	1,5755	26	27,7785	-1,7785	3,1629
			5,0270				47,9221

$$S_1 = 5.0270$$

$$S_2 = 47.9221$$

3.4. Знаходимо критерій R:

$$R = \frac{S_2}{S_1}; \ R = \frac{47.9221}{5.0270} = 9.5329 \ .$$

Порівняємо цей критерій із табличним значенням критерію Фішера при ступенях свободи $\frac{n-c-2m}{2} = 3$ і рівні довіри α = 0,05 $F_{табл}$ = 9,28. Гетероскедастичність присутня, тому що $R > F_{табл}$.

6.2. Економетрична модель з автокорельованими залишками: побудова та аналіз

На основі даних, які наведені в таблиці, побудувати економетричну модель зайнятості населення:

Рік	Виробництво	Зайнятість	Експорт, т
1-й	28	11	25
2-й	30	14	26
3-й	37	16	26
4-й	35	16	24
5-й	36	17	25
6-й	38	15	28
7-й	40	18	30
8-й	45	20	32
9-й	46	21	35
10-й	50	24	38

1. Дослідити залишки на наявність автокореляції.

2. Якщо залишки автокорельовані, то оцінити параметри моделі на основі методу Ейткена.

3. Оцінити достовірність економетричної моделі та її параметрів, визначити довірчі інтервали параметрів.

4. Виконати прогноз зайнятості населення за умови, що в прогнозному періоді обсяг виробництва досягне 55 одиниць, а експорт — 40.

5. Дати економічний аналіз характеристик взаємозв'язку.

Рішення.

1. Ідентифікуємо змінні моделі:

Y_t — зайнятість населення у період t, залежна змінна;

$X1_t$ — виробництво у період t, пояснююча змінна;

$X2_t$ — експорт у період t, пояснююча змінна;

Звідси $Y_t = f(X_{1t}, X_{2t}, u_t)$,

де u_t — стохастична складова, залишки.

Специфікуємо економетричну модель у лінійній формі:

$$Y=a_0+a_1X_1+a_2X_2+u\,,$$

$$\hat{Y}=\hat{a}_0+\hat{a}_1X_1+\hat{a}_2X_2,$$

$$u=Y-\hat{Y}.$$

Визначимо параметри моделі a_0, $\square$, a_2 на основі методу 1МНК, припустивши, що залишки u_t некорельовані:

$$A=(X'X)^{-1}X'Y\,,$$

де X' — матриця, транспонована до матриці X.

X=

1	28	25
1	30	26
1	37	26
1	35	24
1	36	25
1	38	28
1	40	30
1	45	32
1	46	35
1	50	38

Y=

11
14
16
16
17
15
18
20
21
24

x'*X=

10	385	289
385	15259	11396
289	11396	8555

(X'*X)-1=

4,2165	-0,0014	-0,1405
-0,0014	0,0127	-0,0169
-0,1405	-0,0169	0,0274

X'*Y=

172
6848
5111

A=

-2,8270
0,5065
0,0182

Економетрична модель має вигляд:

$$\hat{Y}_t=-2.8270+0,5065X_{1t}+0.0182X_{2t}.$$

Знайдемо розрахункові значення зайнятості на основі моделі і визначимо залишки u_t.

Таблиця 6.2

Рік	Y_t	$\hat{Y}_t$	u_t	$u_t^{\ 2}$	$u_t - u_{t-1}$	$\left(u_t - u_{t-1}\right)^2$	$u_t \cdot u_{t-1}$
1-й	11	11,8106	-0,8106	0,6571			
2-й	14	12,8419	1,1581	1,3413	1,9688	3,8760	-0,9388
3-й	16	16,3874	-0,3874	0,1501	-1,5456	2,3887	-0,4487
4-й	16	15,3380	0,6620	0,4383	1,0494	1,1013	-0,2565
5-й	17	15,8627	1,1373	1,2935	0,4753	0,2259	0,7529
6-й	15	16,9304	-1,9304	3,7263	-3,0677	9,4106	-2,1954
7-й	18	17,9798	0,0202	0,0004	1,9506	3,8046	-0,0390
8-й	20	20,5488	-0,5488	0,3011	-0,5690	0,3237	-0,0111
9-й	21	21,1099	-0,1099	0,0121	0,4388	0,1926	0,0603
10-й	24	23,1906	0,8094	0,6551	0,9193	0,8451	-0,0890
Σ				8,5753		22,1687	-3,1652

Знайдемо оцінку критерію Дарбіна—Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{10} (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{10} u_t^2} = \frac{22.1687}{8.5753} = 2.585 \cdot$$

Порівняємо значення критерію DW з табличним при $\alpha = 0{,}05$ і $n = 10$. Критичні значення критерію DW у цьому випадку:

$DW_1 = 0{,}879$ — нижня межа;

$DW_2 = 1{,}320$ — верхня межа.

Якщо $DW_{\text{факт}} > DW_2$, приймається гіпотеза про відсутність автокореляції.

Оскільки DWфакт > DW_2, то автокореляція відсутня.

Надалі задачу можна не вирішувати, оскільки немає потреби в побудові моделі на основі методу Ейткена.

МЕТОД ІНСТРУМЕНТАЛЬНИХ ЗМІННИХ.

Завдання 1. На основі даних, які наведено у табл. 7.7, треба побудувати економетричну модель інвестицій, яка характеризує залежність інвестицій від розміру основних фондів (млрд. грн.).

Таблиця 7.7

Рік	Інвестиції	Основні фонди
1	*2*	*3*
1-й	10,1	78
2-й	12,4	86
3-й	13,5	94
4-й	14,1	100
5-й	15,7	110
6-й	16,4	122
7-й	17,8	139
8-й	19,1	131
9-й	21,4	144
10-й	22,7	150
11-й	24,3	155
12-й	26,6	164
13-й	28,9	166

Вказівка: Прийнявши до уваги, що вихідні дані можуть мати помилки виміру, для оцінки параметрів моделі використати метод інструментальних змінних.

Необхідно:

1. Оцінити параметри моделі за методом 1МНК.
2. Оцінити параметри моделі за методом Вальда.
3. Для оцінки параметрів моделі застосувати оператор Бартлета.
4. Оцінити параметри моделі на основі оператора Дарбіна.
5. Визначити матрицю коваріацій і стандартні помилки оцінок параметрів кожної моделі.
6. Побудувати довірчі інтервали оцінок параметрів моделі для різних моделей.
7. Провести верифікацію моделей.

8. Дати порівняльний аналіз кожної економетричної моделі, зробити висновки.

Рішення.

1. Ідентифікуємо змінні моделі:

Y_t — інвестиції у період t, залежна змінна;

X_t — розмір основних фондів у період t, пояснююча змінна

Звідси $Y_t = f(X_t, u_t)$,

де u_t — стохастична складова, залишки.

Специфікуємо економетричну модель у лінійній формі:

$$Y = a_0 + a_1 X + u \,,$$

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X \,,$$

$$u = Y - \hat{Y}.$$

Визначимо параметри моделі a_0, $\square$ на основі методу 1МНК:

X=

1	78
1	86
1	94
1	100
1	110
1	122
1	139
1	131
1	144
1	150
1	155
1	164
1	166

Y=

10,1
12,4
13,5
14,1
15,7
16,4
17,8
19,1
21,4
22,7
24,3
26,6
28,9

X'*X=

13	1639
1639	217495

(X'*X)_1 =

1,5413	-0,0116
-0,0116	0,0001

X'*Y=

243
32650,2

	-4,694
A=	0,185

Модель має вигляд:

$$\hat{Y} = -4.694 + 0.185x \ .$$

2. Оцінка параметрів моделі за методом Вальда.

Знайдемо медіану змінної X:

$$Me = 25.$$

Визначимо відхилення кожного значення змінної X від своєї медіани; $X_i - Me$.

Від'ємні відхилення замінимо на –1, а додатні — на + 1. Сукупність цих одиниць є інструментальною змінною (див. табл. 7.1).

Таблиця 7.1.

Щоб оцінити параметри економетричної моделі, на основі оператора Вальда визначимо:

Середні відхилення значень X від медіани:

$$\overline{X}_2 = \frac{3+2+1+0+0}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2 \ ;$$

$$\overline{X}_1 = \frac{-7+(-6)+(-4)+(-2)+(-1)}{5} = \frac{-20}{5} = -4 \ .$$

Середні значення $\overline{Y_2}$ і $\overline{Y_1}$, які відповідають середнім значенням $\overline{X_2}$ і $\overline{X_1}$.

$$\overline{Y}_2 = \frac{8{,}4+8{,}6+8{,}7+8{,}4+8{,}9}{5} = \frac{43}{5} = 8{,}6 \ ;$$

$$\overline{Y}_1 = \frac{7{,}3+7{,}5+7{,}7+7{,}9+8{,}2}{5} = \frac{38{,}6}{5} = 7{,}72 \ ;$$

Розрахуємо оцінки параметрів моделі:

$$\hat{a}_1 = \frac{\overline{Y}_2 - \overline{Y}_1}{\overline{X}_2 - \overline{X}_1} = \frac{8{,}6 - 7{,}72}{1{,}2 + 4} = \frac{0{,}88}{5{,}2} = 0{,}17 \;;$$

$$\hat{a}_0 = \overline{Y} - a_1 \overline{X} = 8{,}16 - 0{,}17 \cdot 23{,}6 = 8{,}16 - 4{,}012 = 4{,}148 \approx 4{,}15 \;;$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} Y_i}{10} = 8{,}16 \;;$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10} = 23{,}6 \;.$$

Звідси економетрична модель:

$$\hat{Y} = 4{,}15 + 0{,}17\,X \,.$$